Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Tipo A
MATEMATICAS I (MA–1111)
Primer Parcial (14 de octubre de 2005)

1. (6 puntos) Resuelva la siguiente desigualdad

$$\frac{|3x+2|-x}{2x+5} \leq 1.$$

Solución: Tenemos que

$$\frac{|3x+2|-x}{2x+5} \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{|3x+2|-x}{2x+5} - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{|3x+2|-3x-5}{2x+5} \leq 0.$$

Si $x \geq -\frac{2}{3}$

$$\frac{|3x+2|-3x-5}{2x+5} = \frac{3x+2-3x-5}{2x+5} = \frac{-3}{2x+5} \leq 0,$$

i.e.,

$$\frac{3}{2x+5} \geq 0.$$

Entonces la solución cuando $x \geq -\frac{2}{3}$ es

$$\left[-\frac{2}{3}, \infty\right) \cap \left[-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right).$$

Si $x < -\frac{2}{3}$

$$\frac{|3x+2|-3x-5}{2x+5} = \frac{-3x-2-3x-5}{2x+5} = \frac{-6x-7}{2x+5} \leq 0,$$

i.e.,

$$\frac{6x+7}{2x+5} \geq 0.$$

La solución cuando $x < -\frac{2}{3}$ es

$$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cap \left\{\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[-\frac{7}{6}, \infty\right)\right\} = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[-\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}\right).$$

La solución final es

$$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[-\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left[-\frac{2}{3}, \infty\right) = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[-\frac{7}{6}, \infty\right).$$

2. (2 puntos) Diga cual(es) de los puntos $(4,1)$ y $(3,-1)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Solución:

$$(4)^2 + (1)^2 - 4*(4) - 2*(1) = 16 + 1 - 16 - 2 = -1.$$

$(4,1)$ no está en la circunferencia

$$(3)^2 + (-1)^2 - 4*(3) - 2*(-1) = 9 + 1 - 12 + 2 = 0.$$

$(3,-1)$ si está en la circunferencia

3. (2 puntos) Halle el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x + 6y = 0$.

Solución: Completando cuadrados tenemos:

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 - 3x + 6y = 0 \\ x^2 - 3x + (3/2)^2 + y^2 + 6y + 3^2 = (3/2)^2 + 3^2 \\ (x - 3/2)^2 + (y + 3)^2 = 45/4 \end{gathered}$$

El centro es $(3/2, -3)$ y el radio es $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

4. (2 puntos) Halle la distancia del punto $(1, -1)$ al punto de intersección de las rectas

$$\begin{cases} 2y &= x - 1 \\ 3y &= x + 1. \end{cases}$$

Solución: El punto intersección es: $y = 2$, $x = 5$, la distancia es:

$$\text{dist } = \sqrt{(5-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

5. (2 puntos) Halle la ecuación de la recta perpendicular a la recta $5y = 4 - x$ que pasa por el origen.

Solución: La recta dada tiene pendiente $-1/5$, por lo tanto la recta perpendicular tiene pendiente 5 y como pasa por $(0, 0)$.

$$\begin{gathered} y - 0 = 5(x - 0) \\ y = 5x \end{gathered}$$

6. (3 puntos) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(3, 4)$ y cuyo centro se encuentra en la recta $x = y$.

Solución: Sea (h, k) el centro y r el radio, entonces $k = h$ y

$$\begin{gathered} (2-h)^2 + (3-k)^2 = r^2 \\ (3-h)^2 + (4-k)^2 = r^2 \end{gathered}$$

igualando y sustituyendo $h = k$, obtenemos

$$\begin{gathered} (2-h)^2 + (3-h)^2 = (3-h)^2 + (4-h)^2 \\ (2-h)^2 = (4-h)^2 \\ 4 - 4h + h^2 = 16 - 8h + h^2 \\ 4 - 4h = 16 - 8h \\ 4h = 12 \\ h = 3 \end{gathered}$$

entonces el centro es $(3, 3)$ y el radio es $\sqrt{(3-3)^2 + (4-3)^2} = 1$ y la ecuación

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

7. (5 puntos) Sean $f(x) = |x|$, $g(x) = x + 1$ y $h(x) = x^2 - 2$

a) Halle la fórmula de $F = h \circ g \circ f$.

b) Halle $F(-1)$ y halle todos los valores de x (si existen) cuya imagen según F es cero.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} h \circ g \circ f(x) &= h \circ g(|x|) \\ &= h(|x| + 1) \\ &= (|x| + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

b)

$$F(-1) = (|-1| + 1)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2.$$

$$\begin{aligned} F(x) = 0 &\iff (|x| + 1)^2 - 2 = 0 \\ &\iff (|x| + 1)^2 = 2 \\ &\iff |x| + 1 = \pm\sqrt{2} \\ &\iff |x| = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

$|x| = -1 - \sqrt{2}$ no tiene sentido, ya que $-1 - \sqrt{2} < 0$

$$|x| = -1 + \sqrt{2} \iff x = \pm(-1 + \sqrt{2})$$

Sólo existen dos soluciones $x = 1 - \sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2} - 1$.

8. (2 puntos) Demuestre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\arccos(x)) &= \pm\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \\ &= \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

El signo debe ser positivo ya que si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$ y por lo tanto, $0 \leq \operatorname{sen}(\arccos(x)) \leq 1$

9. (6 puntos) Sean

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|} & \text{si} \quad 0 < |x| \leq 1 \\ 5x & \text{si} \quad 1 < |x|. \end{cases}$$

y $g(x) = \cos(x)$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$.

a) Encuentre $f \circ g$ y determine su dominio.

b) Grafique $f \circ g$ y determine su rango.

Solución: Tenemos

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad \cos(x) = 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{|\cos(x)|} & \text{si} \quad 0 < |\cos(x)| \leq 1 \\[2ex] 5\cos(x) & \text{si} \quad 1 < |\cos(x)|. \end{cases}$$

Primero $g(x) = \cos(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{\pi}{2}$. Luego $0 < |\cos(x)| \leq 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{\pi}{2}$. Por último $|\cos(x)| > 1$ no se cumple para ningun valor de x. De aqui nos queda:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad |x| = \frac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{|\cos(x)|} = |\tan(x)| & \text{si} \quad |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Asi $Dom(f \circ g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De la gráfica de $|\tan(x)|$ se obtiene que

$$Rang(f \circ g) = [0, \infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$